Számtani sorozatok 2. **Két típus feladat, melyek ismerete szükséges lehet:**

I. Típus feladat, melyben számtani sorozat tagjai közötti összefüggések vannak megadva, s ebből kell a sorozatot meghatározni, azaz első elemét és differenciáját kell kiszámítani. (Ezzel ugye egyértelműen megmondjuk, hogy milyen sorozatról van szó, hiszen ezekből már bárki fel tudná a számokat sorolni!)

Számtani sorozatot alkotó nyolc szám közül a páros sorszámú tagok összege 84, a páratlan sorszámú tagok összege 68. Melyik ez a nyolc szám?
A módszer:
A szöveg alapján felírjuk az egyenlőségeket:

(1.) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 84$
(2.) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 68$

Az egyenletekben szereplő tagokat a sorozat tagjaira vonatkozó összefüggéssel kifejezzük az első elemmel és a differenciával:
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ ennek alapján

$a_2 = a_1 + d$	$a_4 = a_1 + 3d$	$a_6 = a_1 + 5d$	$a_8 = a_1 + 7d$
$a_3 = a_1 + 2d$	$a_5 = a_1 + 4d$	$a_7 = a_1 + 6d$	

Ezt behelyettesítjük a felírt egyenletekbe, majd elvégezzük a lehetséges összevonásokat:

(1.) $(a_1 + d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 7d) = 84$
(2.) $a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 68$

(1.) $4a_1 + 16d = 84$
(2.) $4a_1 + 12d = 68$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert!
A legjobb módszer ilyen típusú feladatoknál az úgynevezett egyenlő együtthatók módszere, ahol az egyenleteket, ha szükséges olyan számokkal szorozzuk meg, hogy valamelyik ismeretlen a két egyenletben azonos együtthatóval, de ellentétes előjellel szerepeljen. Az egyenleteket ezután összeadva ez az ismeretlen kiesik, a másik viszont már egyszerűen kiszámolható.

Fenti példánkban elegendő valamelyik egyenletet (–1)-el megszorozni, azaz előjeleket változtatni:
(1.) $4a_1 + 16d = 84$
(2.) $-4a_1 - 12d = -68$
Összevonva az egyenleteket:
$16d - 12d = 84 - 68$
$4d = 16$ ebből: d = 4

A másik ismeretlen is kiszámolható lenne ilyen módszerrel, de egyszerűbb a kapott számot valamelyik egyenletbe beírni, s a másik ismeretlent kiszámolni az egyenlet megoldásával:
(1.) $4a_1 + 16 \cdot 4 = 84$ / – 64
$4a_1 = 20$ / : 4
$a_1 = 5$
Tehát a nyolc keresett szám: 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; 33

Már szöveg nélkül felírt összefüggéssel megadott feladatok:

1. a_1 = ? d = ?
$a_3 + a_7 = 8$
$3a_4 - a_9 = 36$
(megoldás: 20 és –4)

2. a_1 = ? d = ?
$2a_3 + a_7 = 45$
$a_9 - 3a_2 = 5$
(megoldás: 20 és –4)

Mindkettőt a fentihez hasonlóan kell megoldani, de behelyettesítésnél és összevonásnál vigyázni kell az előjelekre! (Hasonló feladat a Feladatlapok 12. oldal 2.4 és 2.5 feladata)

II. típus: A sorozat összegéből kell meghatározni a sorozat kérdezett tulajdonságát, jellemzőjét.

1. Egy számtani sorozat negyedik eleme 42, a tizedik tagja 102. Hány tagot kell az elsőtől kezdve összeadni ahhoz, hogy a tagok összege 1230 legyen?

adatok felírása: $a_4 = 42$ $a_{10} = 102$ $S_n = 1230$ $n = ?$

(1) a megadott két elemből meg határozható az a_1 és d

$a_{10} - a_4 = 6d$ azaz $102 - 42 = 6d$ ebből **d = 10**

$a_1 + 3d = a_4$ azaz $a_1 + 30 = 42$ ebből **a_1 = 12**

(2) A függvénytáblázatban a számtani sorozat összegére az alábbi képleteket lehet találni:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$$

Mivel itt pontosan az n és így a_n a meghatározandó, ezért csak a képlet második összefüggését tudjuk használni,

$S_n = \frac{[2a_1+(n-1)d]n}{2}$ ebbe helyettesítsük be az ismert adatokat S_n, a_1 és d helyére:

$1230 = \frac{[2\cdot 12+(n-1)\cdot 10]n}{2}$ ezt az egyenletet kell megoldani, aminek első lépéseként szorozzuk meg az egyenletet 2-vel, hogy ne legyen tört, és végezzük el a zárójelek felbontását:

$2460 = (24 + 10n - 10) \cdot n$ összevonás és még egy szorzás elvégzése után

$2460 = 14n + 10n^2$ ez egy másodfokú egyenlet,

melyet nullára rendezünk és alkalmazzuk a megoldóképletet!

$10n^2 + 14n - 2460 = 0$

$n = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 10\cdot(-2460)}}{2\cdot 10} = \frac{-14 \pm \sqrt{196+4\cdot 10\cdot 2460}}{2\cdot 10} = \frac{-14 \pm 314}{20}$

$n_1 = 15$ $n_2 = -16{,}4$ nyilván egy sorozatban a sorszám csak pozitív egész lehet,

tehát n = 15 tag összege lesz 1230.

2. Egy számtani sorozat nyolcadik eleme 45, a tizenegyedik eleme pedig a második elemének hétszerese.

a) Melyik ez a számtani sorozat?

b) Hány prímszám van ebben a sorozatban?
Mit tud mondani a sorozat elemeiről oszthatósági szempontból?

c) A sorozat elemeiből az elsőtől kezdve legalább illetve legfeljebb hány elemet kell összeadni ahhoz, hogy az összegük négyjegyű szám legyen?

(Ez volt érettségi feladat!)

$a_8 = 45$

$a_{11} = 7 \cdot a_2$ (az $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ felhasználásával helyettesíts be az egyenletekbe, majd old meg az egyenletrendszert! (Azt kapod, hogy d = 6 és a_1= 3)

b) Nézzük meg, kezdjük el felsorolni a számokat: 3 ; 9; 15; 21; 27; 33; 39 ; … $a_n = 3 + (n-1) \cdot 6$

Látható mindegyik tag osztható 3-mal, azaz csak az első szám a 3 az amelyik prím közöttük!

Tehát egy prím van a sorozatban.

c) Most a legalább és legfeljebb feltétel azt jelenti, hogy az összegre egyenlőtlenségeket tudunk felírni!

legalább négyjegyű szám legyen, azt jelenti, hogy $S_n \geq 1000$

Legfeljebb feltétel azt jelenti, hogy $S_n < 10\,000$

A két megoldandó egyenlőtlenség:

(1) $\frac{[2\cdot 3+(n-1)\cdot 6]n}{2} \geq 1000$ azaz $[2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 6]n \geq 2000$

zárójelek felbontása után $6n + 6n^2 - 6n \geq 2000$ $6n^2 \geq 2000$

ebből $n \geq 18{,}257$ illetve $n \leq -18{,}257$ (miért lett két megoldás?)

Egyértelmű, hogy a sorozatra n = 19 lehet a jó megoldás, tehát legalább 19 db-ot kell összeadni.

(2) $\frac{[2\cdot 3+(n-1)\cdot 6]n}{2} < 10\,000$ azaz $[2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 6]n < 20\,000$

Bontsd fel a zárójelet és határozd meg n-et!

(ebből $n < 57$ adódik helyes megoldásként)

Tehát ahhoz, hogy négyjegyű legyen az összeg legalább 19 és legfeljebb 57 tagot lehet összeadni!)

Gyakorló feladat:

1) (Ez is volt érettségi feladat) Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azutánin 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.

d) Hány méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon?
   (Mennyi a sorozat különbsége és akkor mennyi a 11. tagja?)
e) Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele?
   (Mikor lesz a sorozat első n tagjának összege 7,1 km? Legalább mekkora legyen n?)
f) Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon? (Hányadik az utolsó nap? Egy nappal a vége előtt már mennyi út készült el összesen? Mennyi a (n-1) tag összege? Mennyi is marad ekkor az utolsó napra?
g) A 21-edik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával? (Válaszát indokolja!)

(Akkor lenne egyenes arányosság, ha a 21. napon kétszer akkora távolságot aszfaltoztak volna le mint az elsőn. Mennyi a sorozat 21. tagja? Ez kétszer akkora, mint az első?)